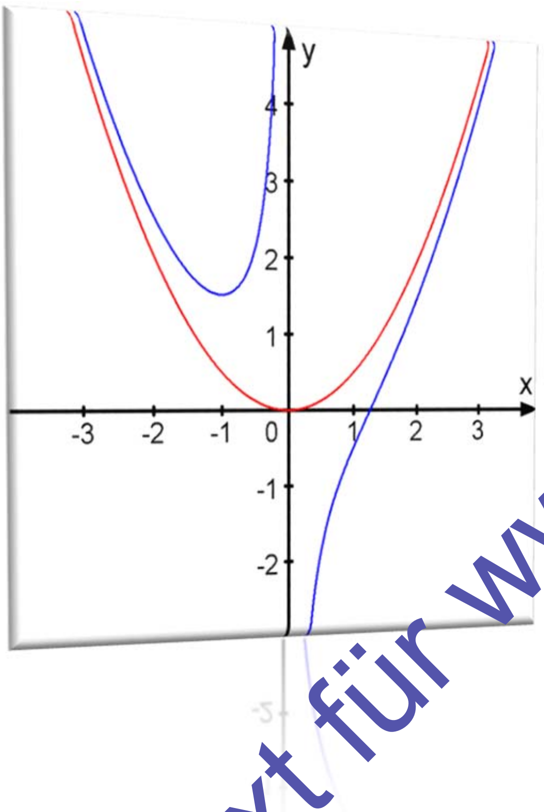
ANALYSIS

Gebrochen rationale Funktionen

Grundeigenschaften ohne Ableitungsmethoden



Nullstellen
Polstellen
Asymptoten
Grenzwerte

Datei Nr. 43003

Friedrich W. Buckel

Stand: 11. März 2017

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Für die Klassenstufe 10 gibt es eine stark vereinfachte Version als Einführungstext: **18080.**
Dort wird sehr anschaulich gearbeitet, wobei man günstigerweise einen Grafikrechner oder ein Grafikprogramm einsetzen kann.

Die Theorie der gebrochen rationalen Funktionen findet man **für die Oberstufe** in folgenden Texten:

43003 **Grundeigenschaften** (vorliegender Text) – **Kompakte Fassung.**
Hier werden diese Themen behandelt:
1. Funktionsgleichungen und Umformungen
2. Polstellen, hebbare Definitionslücken bzw. senkrechte Asymptoten und Löcher. Hier eine kompakte Darstellung, in 41010 steht es sehr ausführlich, wie man es im Unterricht zeigen kann.
3. Grenzwerte für $x \to \pm\infty$: Waagrechte und schräge Asymptoten

41010 **Grenzwerte und Stetigkeit ganz ausführlich**
Ab Seite 33: Untersuchung gebrochen rationaler Funktionen.
Ausführliche Untersuchung der Polstellen und der hebbaren Definitionslücken
Grenzwerte für $x \to \pm\infty$: Waagrechte und schräge Asymptoten.
(Überschneidung mit 43003, nur viel ausführlicher!)

43010 **Symmetrie-Untersuchungen bei gebrochen-rationalen Funktionen**

41070 **Kurven zeichnen mit Ordinatenaddition**

43012 **Geschichten (In 40 Schritten programmierter Kurs)**

43015 **Ableitung gebrochen rationaler Funktionen**

43031 **Gebrochen rationale Funktionen ohne Polstellen**

43101 **Sammlung von sehr vielen Muster-Kurvendiskussionen**

und weitere

Inhalt

1 Funktionsgleichungen

1.1 Definition einer gebrochen rationalen Funktion

Eine Funktion, die man auf diese Form (**Normalform**) bringen kann, heißt **gebrochen rational**:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_o}$$

Man nennt den größten Exponenten m des Zählers den **Grad des Zählers** und den höchsten vorkommenden Exponenten n im Nenner den **Grad des Nenners**.
Das Zählerpolynom u(x) hat also den Grad m, das Nennerpolynom v(x) den Grad n.
Die Differenz **m - n** ist der sogenannte **Asymptotengrad.**

$f_1(x)=\frac{1}{x}$ hat den Zählergrad 0, den Nennergrad 1 und den Asymptotengrad -1

$f_2(x)=\frac{x+4}{2x^2}$, hat den Zählergrad 1, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad -1

$f_4(x)=\frac{x^2-4}{x^2+9}$ hat den Zählergrad 2, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad 0

$f_6(x)=\frac{x^3-8}{2x}$ hat den Zählergrad 3, den Nennergrad 1 und den Asymptotengrad 2

Die Funktion $f_3(x)=\frac{2}{x+3}-\frac{5}{x-3}$ ist auch gebrochen rational, aber sie ist nicht in der Normalform.
Um diese zu berechnen, muss man die beiden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

$$f_3(x)=\frac{2}{x+3}-\frac{5}{x-3}=\frac{2\cdot(x-3)-5\cdot(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-6-5x-15}{(x+3)(x-3)}=\frac{-3x-21}{(x+3)(x-3)}=\frac{-3x-21}{x^2-9}$$

Ähnlich bei f_5: $f_5(x)=x+1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3+x^2-1}{x^2}$

<u>Nicht</u> zu den gebrochen rationalen Funktionen gehören diese Funktionen:

$g_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g_2(x)=\frac{4}{2^x+1}$ $g_3(x)=\frac{x+2}{|x-3|}$.

1.2 Umformungen der Funktionsgleichung.

(1) Herstellung der Normalform

1. Fall: Nenner ohne Summe

a) $f(x)=2-\frac{3}{x}$ Man bringt 2 auf den Nenner x: $f(x)=2-\frac{3}{x}=\frac{2\cdot x}{x}-\frac{3}{x}=\frac{2x-3}{x}$

b) $f(x)=x+1+\frac{4}{x}=\frac{(x+1)\cdot x}{x}+\frac{4}{x}=\frac{x^2+x+4}{x}$

c) $f(x)=x-1+\frac{4}{x^2}=\frac{(x-1)\cdot x^2+4}{x^2}=\frac{x^3-x^2+4}{x^2}$

d) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2\cdot x^2+2\cdot 2}{2x^2}=\frac{x^4+4}{2x^2}$

e) $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-\frac{4}{x}=\frac{x^2+2x-16}{4x}$

2. Fall: Nenner mit Summe

a) $f(x)=2-\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)}{(x+1)}-\frac{3}{x+1}=\frac{2x+2-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$

b) $f(x)=x+\frac{4}{x+2}=\frac{x\cdot(x+2)}{(x+2)}+\frac{4}{x+2}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

c) $f(x)=x+1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x^2-2x+1)-2}{(x-1)^2}$

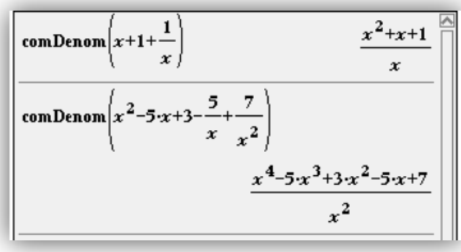
MERKE: Den Nenner sollte man nie ausmultiplizieren

Arbeiten mit CAS-Rechnern:

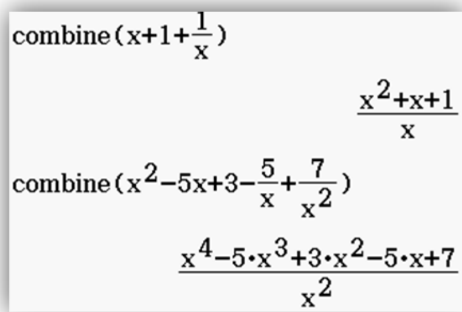
a) $\underbrace{x+1+\frac{1}{x}}_{\text{zerlegte Form}}=\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x}}_{\text{Hauptform}}$

b) $\underbrace{x^2-5x+3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}_{\text{zerlegte Form}}=\underbrace{\frac{x^4-5x^3+3x^2-5x+7}{x^2}}_{\text{Hauptform}}$

TI-Nspire verwendet den Befehl **comDenom**:



CASIO ClassPad verlangt **combine**:



(2) Herstellung der zerlegten Form

Wenn der Zählergrad nicht kleiner als der Nennergrad ist, dann ist es für manche Fragestellungen günstig, einen Term in der Normalform in einzelne Summanden zu zerlegen.

1. Fall: Nenner ohne Summe

a) $f(x) = \frac{2x-4}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{4}{x} = 2 - \frac{4}{x}$

Man zerlegt den Bruch in eine Differenz aus 2 Brüchen mit demselben Nenner x und kürzt.

b) $f(x) = \frac{x^2-8}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3-8}{4x} = \frac{x^3}{4x} - \frac{8}{4x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x^2-4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = x + 1 - \frac{4}{x^2}$

2. Fall: Nenner mit Summe

Bei einfachen Brüchen kann man dies rasch mit einer günstigen Umformung des Zählers erledigen:

e) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{(x+1)+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{2x-5}{x+2} = \frac{2x + \boxed{4} - \boxed{4} - 5}{x+2} = \frac{(2x+4)-9}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x+2)} - \frac{9}{x+2} = 2 - \frac{9}{x+2}$!!!

Hier wird eine Nullsumme 4 – 4 addiert, damit man dann 2 ausklammern und dann kürzen kann.

Meistens aber wird man das Verfahren der Polynomdivision anwenden (Siehe Text 12116):

Zu e) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x+2):(x+1) = 1 \\ -(x+1) \\ \hline \quad 1 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$

Zu f) $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (2x-5):(x+2) = 2 \\ -(2x+4) \\ \hline \quad -9 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = \frac{2x-5}{x+2} = 2 - \frac{9}{x+2}$

g) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+2}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2 + 0x - 9):(x+2) = x - 2 \\ -(x^2+2x) \\ \hline \quad -2x - 9 \\ \quad -(-2x) - 4 \\ \hline \quad\quad -5 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = x - 2 - \frac{5}{x+2}$

h) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x-1}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 0x^2 - x + 1):(x-1) = x^2 + x \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad x^2 - x \\ \quad -(x^2 - x) \\ \hline \quad\quad 0 + 1 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x-1}$

Polynomdivision mit den CAS-Rechnern **TI Nspire** und **CASIO ClassPad** geschieht mit dem Befehl „**propFrac**“:

$\text{propFrac}\left(\frac{x^3-x+1}{x-1}\right)$	$\frac{1}{x-1}+x^2+x$
$\text{propFrac}\left(\frac{x^3+2\cdot x^2+2}{x^2+1}\right)$	$\frac{-x}{x^2+1}+x+2$
$\text{propFrac}\left(\frac{x^3+2\cdot x+2}{x^2+1}\right)$	$\frac{x+2}{x^2+1}+x$

$\text{propFrac}\left(\frac{x^3-x+1}{x-1}\right)$

$$x^2+x+\frac{1}{x-1}$$

$\text{propFrac}\left(\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}\right)$

$$x-\frac{x}{x^2+1}+2$$

$\text{propFrac}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^2+1}\right)$

$$x+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}$$

Trainingsaufgabe 1

Bringe auf die Normalform:

a) $f(x)=4-\frac{3}{x}$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{x}$

c) $f(x)=x+2-\frac{4}{x}$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x-\frac{4}{x^2}$

e) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{x}$

f) $f(x)=2+\frac{3}{2x}-\frac{8}{x^2}$

g) $f(x)=3-\frac{2}{x-4}$

h) $f(x)=1-\frac{x+2}{x-1}$

i) $f(x)=1-\frac{3x}{x^2-1}$

j) $f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-2}$

k) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}+\frac{2x}{x-3}$

l) $f(x)=x^2-1+\frac{12}{x+1}$

Trainingsaufgabe 2

Zerlege in Einzelbrüche so weit wie möglich:

(a) $\frac{x+4}{8x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x}$ (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2}$

Und jetzt mit Polynomdivision:

(f) $\frac{4x+1}{x+2}$ (g) $\frac{2x^2+x}{2x-1}$ (h) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$ (i) $\frac{x^3-4x+4}{x^2+4}$ (j) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8}$

Trainingsaufgabe 1 - Lösungen

a) $f(x)=4-\frac{3}{x}=\frac{4x-3}{x}$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{x}=\frac{x^2+6}{3x}$

c) $f(x)=x+2-\frac{4}{x}=\frac{x^2+2x-4}{x}$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x-\frac{4}{x^2}=\frac{x^3-16}{4x^2}$

e) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{x}=\frac{x^3-4}{2x}$

f) $f(x)=2+\frac{3}{2x}-\frac{8}{x^2}=\frac{4x^2+3x-16}{2x^2}$

g) $f(x)=3-\frac{2}{x-4}=\frac{3(x-4)-2}{x-4}=\frac{3x-14}{x-4}$

h) $f(x)=1-\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1-(x+2)}{x-1}=\frac{x-1-x-2}{x-1}=\frac{-3}{x-1}=-\frac{3}{x-1}$

i) $f(x)=1-\frac{3x}{x^2-1}=\frac{x^2-1-3x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x-1}{x^2-1}$

j) $f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-2-2(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2-2x-4}{x^2-4}=\frac{-x-6}{x^2-4}=-\frac{x+6}{x^2-4}$

k) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}+\frac{2x}{x-3}=\frac{x+2x(x+3)}{x^2-9}=\frac{x+2x^2+6x}{x^2-9}=\frac{2x^2+7x}{x^2-9}$

l) $f(x)=x^2-1+\frac{12}{x+1}=\frac{x^2(x+1)-(x+1)+12}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x-1+12}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x+11}{x+1}$

Trainingsaufgabe 2 - Lösungen

a) $\frac{x+4}{8x}=\frac{x}{8x}+\frac{4}{8x}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2x}$

b) $\frac{3x-4}{2x^2}=\frac{3x}{2x^2}-\frac{4}{2x^2}=\frac{3}{2x}-\frac{2}{x^2}$

c) $\frac{4x+6}{3x}=\frac{4x}{3x}+\frac{6}{3x}=\frac{4}{3}+\frac{2}{x}$

d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}=\frac{x^3}{4x^2}-\frac{12x^2}{4x^2}+\frac{4}{4x^2}=\frac{x}{4}-3+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}x-3+\frac{1}{x^2}$

e) $\frac{x^4-64}{4x^2}=\frac{x^4}{4x^2}-\frac{64}{4x^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}=\frac{1}{4}x^2-\frac{16}{x^2}$

Und jetzt mit Polynomdivision:

f) $\frac{4x+1}{x+2}=4-\frac{7}{x+2}$, denn

$$\begin{array}{l} (4x+1):(x+2)=4 \\ \underline{-(4x+8)} \\ \quad -7 \quad \text{Divisionsrest} \end{array}$$

g) $\frac{2x^2+x}{2x-1}=x+1+\frac{1}{2x-1}$, denn

$$\begin{array}{l} (2x^2+x):(2x-1)=x+1 \\ \underline{-(2x^2-x)} \\ \quad 2x \\ \quad \underline{-(2x-1)} \\ \quad\quad 1 \quad \text{Divisionsrest} \end{array}$$

h) $\frac{x^2-1}{x^2+4}=1-\frac{5}{x^2+4}$, denn

$$\begin{array}{l} (x^2-1):(x^2+4)=1 \\ \underline{-(x^2+4)} \\ \quad -5 \quad \text{Divisionsrest} \end{array}$$

i) $\frac{x^3-4x+4}{x^2+4}=x+\frac{-8x+4}{x^2+4}=x-\frac{8x-4}{x^2+4}$

$$\begin{array}{l} (x^3-4x+4):(x^2+4)=x \\ \underline{-(x^3+4x)} \\ \quad -8x+4 \quad \text{Divisionsrest} \end{array}$$

j) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8}=\frac{1}{2}x+\frac{2x}{2x^2+8}=\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+4}$

$$\begin{array}{l} (x^3+6x):(2x^2+8)=\frac{1}{2}x \\ \underline{-(x^3+4x)} \\ \quad 2x \quad \text{Divisionsrest} \end{array}$$

2 Nullstellen - Polstellen

Dieses Thema hängt mit dem Thema Grenzwerte und Stetigkeit zusammen und wird im Text 41010 ab Seite 33 sehr ausführlich und gründlich dargestellt. Hier nur eine kompakte Darstellung.

1. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

Vorarbeit: Nullstellen des Zählers. $Z=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Nullstellen des Nenners: $N=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Auswertung: **Definitionsbereich:** $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(1) **Nullstellen der Funktion / Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse:**

Die Bedingung dafür lautet: Zähler = 0, aber Nenner $\neq 0$

Denn ein Bruch wird 0, wenn der Zähler 0 wird, der Nenner aber ungleich 0 bleibt.

Dies ist erfüllt für die Zahl -1.

Ergebnis: **Die Funktion f** hat die Nullstelle -1 und

Das Schaubild K schneidet die x-Achse im Punkt $N(-1\,|\,0)$.

(2) **Polstellen der Funktion / Senkrechte Asymptote der Kurve:**

Die Bedingung dafür lautet: Nenner = 0, aber Zähler $\neq 0$

Dies ist erfüllt für die Zahl 2.

Ergebnis: **Die Funktion** hat die Polstelle 2 und

Das Schaubild K hat die senkrechte Asymptote x = 2

Hinweis dazu:

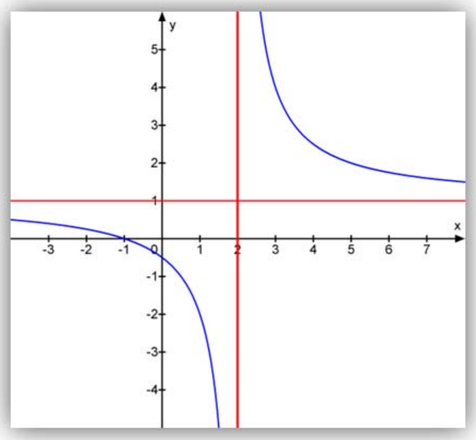
Eine **Polstelle** hat die Eigenschaft, dass die Funktionswerte bei Annäherung an sie gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen. Wie man dies nachweist, steht in 41010 ab Seite 33.

Die geometrische Darstellung, also die Kurve (der Graph,. das Schaubild) hat dann dort eine senkrechte Asymptote, das ist eine Gerade, der sich die Kurve beliebig gut annähert, sie aber nie erreicht.

Rechts das Schaubild, das mit MatheGrafix erstellt worden ist.

Man erkennt neben der senkrechten Asymptote noch eine waagrechte Asymptote.

Wie man diese ermittelt, wird im Abschnitt 3 gezeigt.



Man achte auch genau auf die Begriffszuordnungen.

Eine Funktion hat keine Asymptoten, ein Schaubild keine Nullstellen oder Polstellen. Das sind **algebraische** Begriffe, die zum Funktionsbegriff gehören, während das Schaubild und eine Asymptote **geometrische** Begriffe sind.

2. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{1-x}{(x-2)^2}$

Vorarbeit: Nullstellen des Zählers. $Z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

Nullstellen des Nenners: $N=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$. (doppelte Lösung)

Auswertung: **Definitionsbereich:** $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(1) **Nullstellen der Funktion / Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse:**

Die Bedingung dafür lautet: Zähler = 0, aber Nenner $\neq 0$

Ergebnis: **Die Funktion f** hat die Nullstelle 1 und

Das Schaubild K schneidet die x-Achse im Punkt $N(1|0)$.

(2) **Polstellen der Funktion / Senkrechte Asymptote der Kurve:**

Die Bedingung dafür lautet: Nenner = 0, aber Zähler $\neq 0$

Ergebnis: **Die Funktion** hat die Polstelle 2 und

Das Schaubild K hat die senkrechte Asymptote x = 2

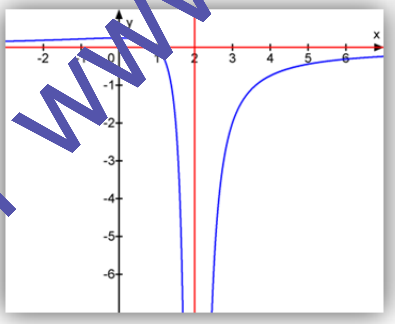
Die doppelte Polstelle zeigt eine Besonderheit. Durch das Quadrat im Nenner gibt es bei Überschreitung der Polstelle 2 keinen Vorzeichenwechsel.

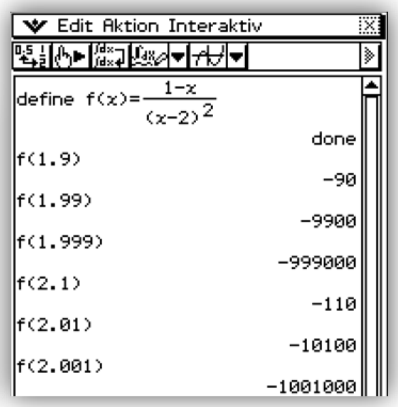
Es liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel vor.

Hier nochmals eine Veranschaulichung durch Funktionswertberechnungen in unmittelbarer Umgebung der Polstelle 2 mit CASIO ClassPad.

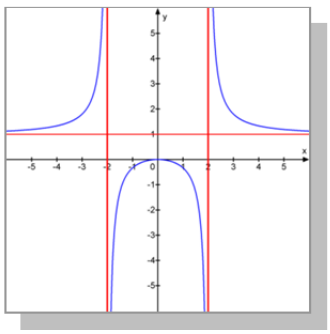
Man erkennt, dass von links und von rechts die Annäherung nach $-\infty$ erfolgt.

Das zeigt sich dann natürlich auch im Schaubild:





3. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ **Kurzversion**



Vorarbeit $Z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=0$ doppelte Lösung

$N=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2=2;\ x_3=-2$

Auswertung: Nullstellen (Z=0, $N\neq 0$): x = 0

Polstellen $(N=0;\ Z\neq 0)$: x = 2 und x = -2.

und $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

Ergebnis: Die Funktion hat die doppelte Nullstelle $x_1 = 0$ und zwei Polstellen mit Zeichenwechsel: $x_2=2;\ x_3=-2$. Das Schaubild berührt somit die x-Achse in $N(0|0)$ (denn es liegt eine doppelte Nullstelle vor) und es hat die senkrechten Asymptoten x= 2 und x = - 2 jeweils mit entgegengesetzter Annäherung.

4. Musterbeispiel: $f(x) = \frac{16x}{x^2+4}$ Kurzversion

Vorarbeit: $Z = 0 \;\Leftrightarrow\; 16x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

$N = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -4$ keine Lösung.

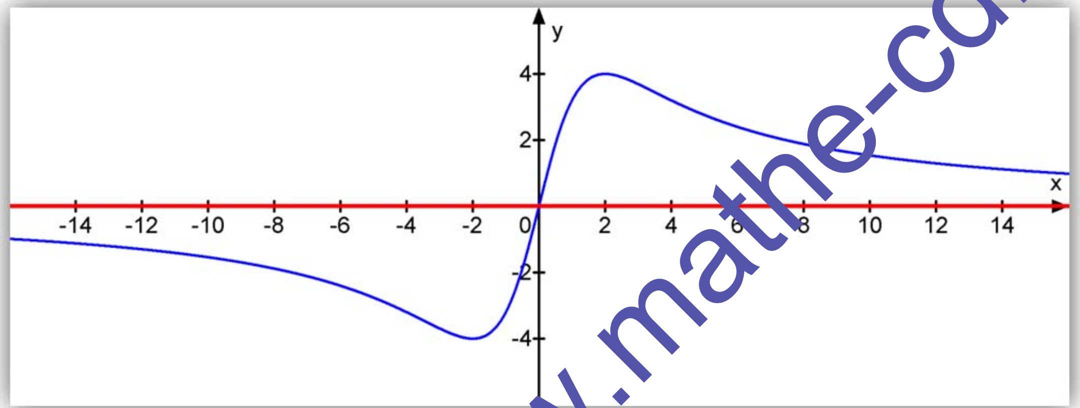
Auswertung: Nullstellen ($Z = 0,\ N \neq 0$): $x = 0$

Polstellen $(N = 0;\ Z \neq 0)$: keine.

$\mathbf{D} = \mathbb{R}$

Ergebnis: Die Funktion hat die Nullstelle x = 0 und keine Polstelle.

Das Schaubild schneidet die x-Achse in $N(0\,|\,0)$ und hat keine senkrechte Asymptote.



5. Musterbeispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ Kurzversion

Vorarbeit: $Z = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 2$

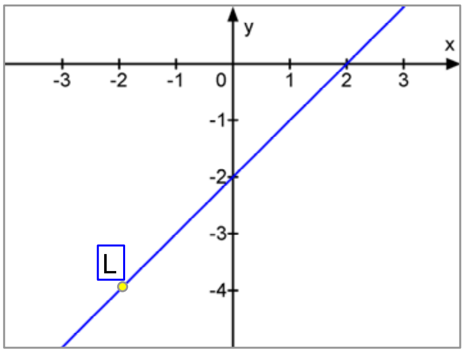
$N = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$

Auswertung: Nullstellen ($Z = 0,\ N \neq 0$): Nur x = 2 !

Polstellen $(N = 0;\ Z \neq 0)$: keine.

Loch: $(Z = 0$ **und** $N = 0)$: bei x = -2

$\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



Immer, wenn Zähler und Nenner eine gemeinsame Nullstelle besitzen, dann kann man nach dem Faktorisieren von Zähler und Nenner einen Faktor herauskürzen. In diesem Fall zeigt es sich dann, dass das Schaubild ein Loch hat:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}} = x - 2$$

Das Schaubild ist also die „punktierte" Gerade mit der Gleichung $y = x - 2$, denn auf Grund des Definitionsbereichs hat sie bei x = -2 ein Loch mit den Koordinaten $L(-2\,|\,-4)$.

Man kann dann mit der gekürzten Funktion weiterarbeiten, wenn man den Definitionsbereich so beibehält.

6. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ Kurzversion

<u>Vorarbeit:</u> $Z=0 \Leftrightarrow x=3$

$N=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

<u>Auswertung:</u>

Nullstellen ($Z = 0,\ N \neq 0$): Keine.

Polstellen $(N=0;\ Z\neq 0)$: x = -3.

Loch: $(Z=0$ **und** $N=0)$: bei x = 3

$\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$

Die Funktion hat keine Nullstelle, denn die Nullstelle 3 des Zählers ist auch Nullstelle des Nenners. Das Schaubild hat also ein Loch bei x = 3.

Der Nenner hat aber die Nullstelle -3, die keine Nullstelle des Zählers ist. Das Schaubild hat somit die senkrechte Asymptote x = -3.

<u>Vereinfachen des Funktionsterms:</u>

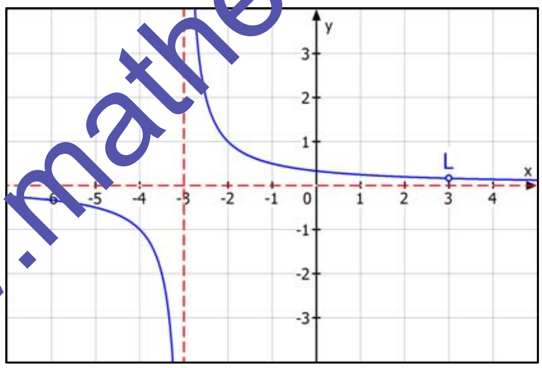
Durch Faktorisieren des Nenners und Kürzen geht f(x) über in

$$g(x)=\frac{\cancel{(x-3)}}{(x+3)\,\cancel{(x-3)}}=\frac{1}{x+3}.$$

Die gekürzte Funktion hat $D=R\setminus\{-3\}$

und somit bei x = 3 den Funktionswert $f(3)=\frac{1}{6}$.

das Loch hat somit die Koordinaten $L(3\,|\,\frac{1}{6})$.



7. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{x^3-4x}{x}$ Kurzversion

<u>Vorarbeit:</u> $Z=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 2$

$N=0 \Leftrightarrow x=0$, also ist $D=R\setminus\{0\}$.

<u>Auswertung:</u> Die Funktion hat die Nullstellen 2 und – 2.

Das Schaubild schneidet die x-Achse in $N_{1,2}(\pm 2\,|\,0)$

Bei x = 0 sind Zähler und Nenner Null, K hat also ein Loch bei x = 0.

Eine Polstelle ist nicht vorhanden.

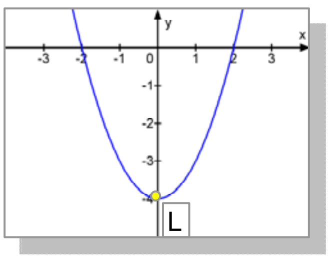
Vereinfachung des Funktionsterms:

Durch Faktorisieren des Zählers und Kürzen durch x entsteht die neue Funktion

$$g(x)=\frac{x\cdot(x^2-4)}{x}=x^2-4.$$

Sie hat bei x = 0 den Wert -4, also hat das Loch die Koordinaten $L(0\,|\,-4)$.

Das Schaubild von f ist eine punktierte Parabel.



8. Musterbeispiel: $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ Kurzversion

Vorarbeit: $Z=0 \Leftrightarrow x^3-x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$

$N=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x_{3,4}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$ doppelte Lösung.

Bevor wir hier eine Auswertung vornehmen können, muss auffallen, dass die gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner zugleich eine doppelte Nullstelle des Nenners ist. Das führt zu einer ganz überraschenden Wendung. Diese erkennt man, wenn man Zähler und Nenner faktorisiert:

Zähler: Aus den Nullstellen x = 2 und x = -1 werden die Faktoren $(x-2)\cdot(x+1)$.

Nenner: Aus der doppelten Nullstelle x = 2 werden die Faktoren $(x-2)\cdot(x-2)=(x-2)^2$.

Also gilt: $f(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^2}$. Kürzen führt zur Funktion $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$

Und jetzt erkennt man folgendes: Durch das kürzen wird die gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner zur alleinigen Nullstelle des Nenners. Das bedeutet, dass hier bei x = 2 kein Loch vorhanden ist, sondern eine Polstelle!!!

Auswertung:

Nullstellen (Z = 0, $N\neq 0$): x = -1.

Polstellen $(N=0;\ Z\neq 0)$: Nach dem Kürzen: x = 2

Loch: $(Z=0$ **und** $N=0)$: Keines.

$\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Zusammenfassung und Übersicht

Zur Berechnung von Nullstellen (Schnittpunkten mit der x-Achse), Polstellen (senkrechten Asymptoten) und Löchern wird folgendes Verfahren empfohlen:

Vorarbeit: Nullstellen des Zählers berechnen: x = …

Nullstellen des Nenners berechnen: x = …

Auswertung: Zuerst schaut man nach, ob Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen besitzen.

(1) **Wenn nein**, erhält man

Nullstellen der Funktion aus der Bedingung: $Z=0$ und $N\neq 0$.

Polstellen der Funktion aus der Bedingung: $N=0$ und $Z\neq 0$

Dort wo die Funktion eine Nullstelle hat, schneidet das Schaubild K die x-Achse. Dort wo die Funktion eine Polstelle hat, besitzt K eine senkrechte Asymptote.

(2) **Wenn ja,** faktorisiert man Zähler und Nenner und kürzt die aus den gemeinsamen Nullstellen gebildeten Linearfaktoren heraus.

Nullstellen und Polstellen findet man dann wie zuvor.

An der gemeinsamen Nullstelle von Z und N hat das Schaubild dann entweder ein Loch (wenn der betreffende Linearfaktor nach dem Kürzen im Nenner verschwunden ist), oder doch eine senkrechte Asymptote (und f eine Polstelle), wenn dieser Linearfaktor nach dem Kürzen im Nenner noch vorhanden ist.

Trainingsaufgaben 3

Bestimme Nullstellen und Polstellen sowie Definitionsbereich der Funktionen.
Gib für die Schaubilder die Schnittpunkte mit der x-Achse und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten an. Wenn das Schaubild ein Loch hat, gib dessen Koordinaten an.

a) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{4x+8}$

c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

e) $f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$

f) $f(x) = 4\frac{x+2}{x^2-6x+9}$

g) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x}$

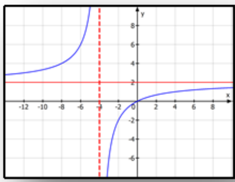
h) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

i) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$

j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x-10}$

Trainingsaufgabe 3 - Lösungen

a) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$



Z = 0: x = 0

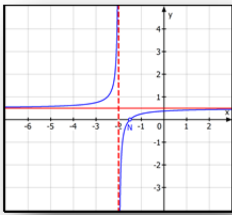
N = 0: x = - 4

Nullstelle: $N(0\,|\,0)$

Polstelle $x_P = -4$ mit VZW.

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{4x+8}$



Z = 0: $x = -\frac{3}{2}$

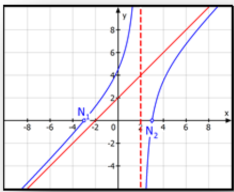
N = 0: $x = -2$

Nullstelle: $N\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)$

Polstelle: $x_P = -2$ mit VZW.

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$

c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$



Z = 0: $x = \pm 3$

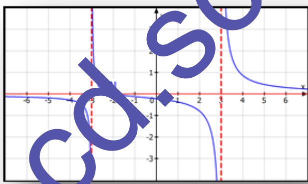
N = 0: x = 2

Nullstellen: $N_{1,2}(\pm 3\,|\,0)$

Polstelle: $x_P = 2$ mit VZW

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$



Z = 0: x = - 2

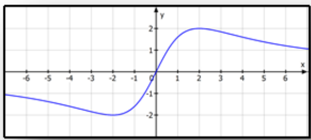
N = 0: $x = \pm 3$

Nullstelle: N (- 2 | 0)

Polstellen: $x_P = \pm 3$ je mit VZW

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{\pm 3\}$

e) $f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$



Z = 0: x = 0

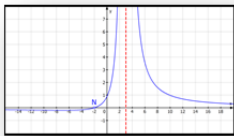
N $\neq$ 0: für alle $x \in \mathbf{R}$

Nullstelle: $N_1(0\,|\,0)$

Keine Polstellen

$\mathbf{D} = \mathbf{R}$

f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$



Z = 0: x = - 2

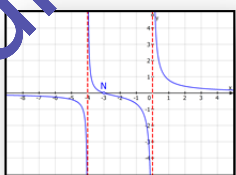
N = 0: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

Nullstellen: $N_{1,2}(-2\,|\,0)$)

Polstelle: $x_P = 3$ doppelt (**ohne** VZW)

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

g) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x} = \frac{x+3}{x \cdot (x+4)}$



Z = 0: $x = -3$

N = 0: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$

Nullstelle: $N(-3\,|\,0)$

Pole: 0 und -4 mit VZW

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-4; 0\}$

h) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$

Z = 0: x = -3

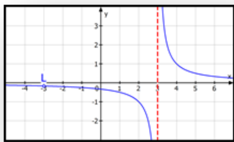
N = 0: $x = \pm 3$

-3 ist gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner.

KEINE Nullstelle, Loch L

Polstelle: $x_P = 3$ mit VZW

$L\left(-3\,|\,-\frac{1}{6}\right)$, $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{\pm 3\}$



i) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$

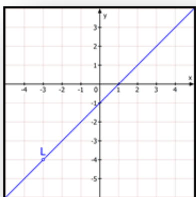
Z = 0: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

N = 0: $x = -3$

Nullstellen $N_1(1\,|\,0)$, Loch $L(-3\,|\,-4)$

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)} = x - 1$



j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x-10} = \frac{(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5}$

N = 0: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

Z = 0: x = 2

Loch: $L\left(2\,|\,\frac{1}{7}\right)$

Polstelle: - 5 mit VZW

$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-5; 2\}$

3 Verhalten für $x \to \pm\infty$

Auch diese Thematik wird in 41010 sehr ausführlich dargestellt. Hier Kurzbeispiele dazu.

3.1 Grad Zähler < Grad Nenner

WISSEN: Diese Funktionen haben für $x \to \pm\infty$ den Grenzwert 0: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Ihr Schaubild hat daher die x-Achse als waagrechte Asymptote.

Beispiele mit Begründungen:

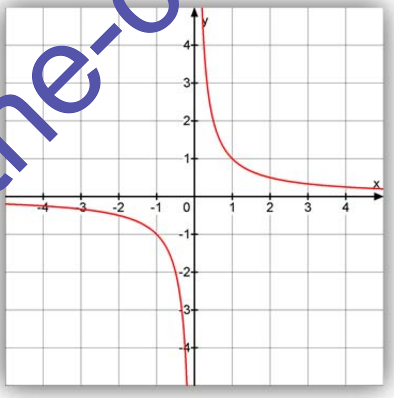
B1: $f(x) = \frac{1}{x}$

Diese Eigenschaft kann man für die einfachste gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ untersuchen:

a) Im Text 43001 zeige ich auf Seite 46, wie man beweisen kann, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ist.

Wer keinen Beweis braucht, sondern dies nur genauer überprüfen will, kann mit seinem Rechner folgendes nachrechnen:

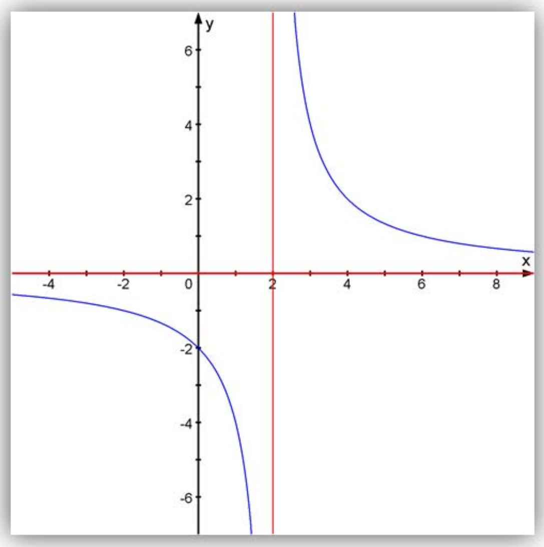
Define $f(x)=\frac{1}{x}$	Fertig
f(1000)	0.001
f(10000)	0.0001
f(100000)	0.00001
f(-100000)	-0.00001



Da die Funktion diesen Grenzwert hat, nähert sich ihr Schaubild der x-Achse beliebig gut an:

Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.

B2: $f(x) = \frac{4}{x-2}$



Grenzwertberechnung:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}} = \frac{4\cdot\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}}{1-2\cdot\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}} = \frac{4\cdot 0}{1-2\cdot 0}$$

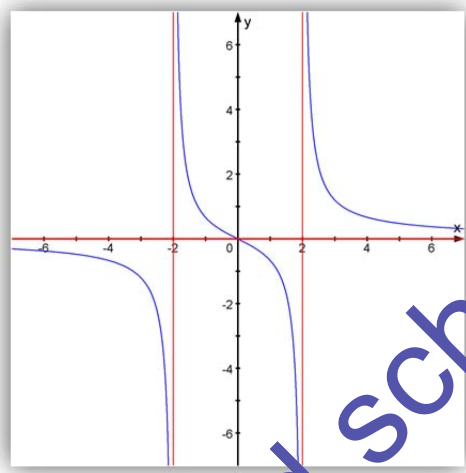
Diese Berechnung verwendet den „Grenzwertsatz“, der es gestattet, einen Grenzwert durch Umformung z. B. aus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ herzuleiten.

Jetzt wird man $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ verwenden:

Ergebnis: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$.

Folglich ist die x-Achse waagrechte Asymptote.

B3: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$



Grenzwertberechnung:

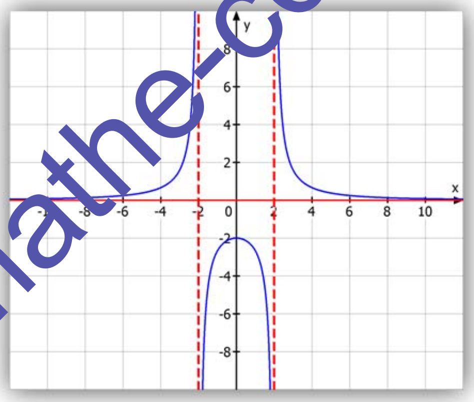
Die ausführliche Berechnung des Grenzwertes sieht so aus (wobei durch die höchste x-Potenz des Nenners, also durch x^2, gekürzt wird.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

Ergebnis: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2-4}=0$

Folglich ist die x-Achse waagrechte Asymptote.

B4 $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$



Grenzwertberechnung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0\text{, denn }\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Ausführliche Berechnung des letzten Grenzwertes;

$$=\frac{8\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}{1-4\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}==\frac{8\cdot 0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

Ergebnis: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{8}{x^2-4}=0$, folglich ist die x-Achse waagrechte Asymptote.

B5: $f(x)=8\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$

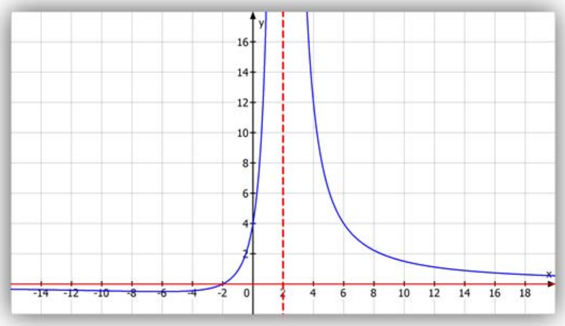
Grenzwertberechnung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}8\frac{x+2}{(x-2)^2}=8\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x^2-4x+4}=8\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=8\cdot\frac{0+0}{1-0+0}=0$$

Es wurde durch die höchste x-Potenz des Nenners gekürzt, also durch x^2.

Man lässt in der Regel diesen Zwischenschritt weg:

$$=8\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}}=\dots\ ,$$



sondern schreibt als Begründung meist nur noch auf:

denn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

(Hier hat f einen Pol ohne Vorzeichenwechsel!)

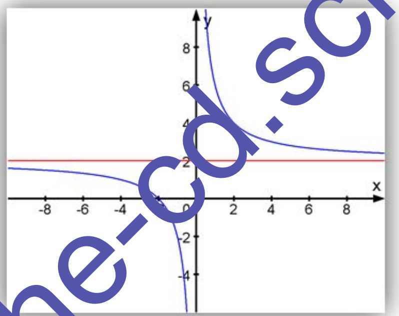
3.2 Grad Zähler = Grad Nenner

WISSEN: Diese Funktionen haben für $x \to \pm\infty$ einen Grenzwert : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = g \neq 0$.
Ihr Schaubild hat daher eine Parallele zur x-Achse als waagrechte Asymptote.

Beispiele mit Begründungen:

Bei Funktionen, die im Nenner keine Summe enthalten, sollte man den Funktionsterm in Summanden zerlegen.

B6: $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+4}{x}}$



Diese Normalform (alles in einem Bruch) verwendet man für die Bestimmung von Nullstellen und Polstellen:

$$Z = 0 \iff 2x+4=0 \iff x=-2$$
$$N = 0 \iff x = 0 \quad \text{also} \quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Auswertung:

Die Nullstelle der Funktion $(Z=0 \text{ und } N\neq 0)$ ist -2, während 0 eine Polstelle mit VZW ist $(N=0 \text{ und } Z\neq 0)$, Das Schaubild schneidet somit die x-Achse in $N(-2\,|\,0)$ und hat die senkrechte Asymptote $x=0$ (mit gegensinniger Annäherung).

Für die Berechnung des Grenzwerts und damit der Bestimmung der waagerechten Asymptote sollte man den Bruchterm zerlegen:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{4}{x} = \boxed{2 + \frac{4}{x}}$$

Grenzwertberechnung:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}\right) = \lim_{|x|\to\infty} 2 + 4\cdot\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x} = 2+0 = 2, \text{ denn } \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{1}{x} = 0$$

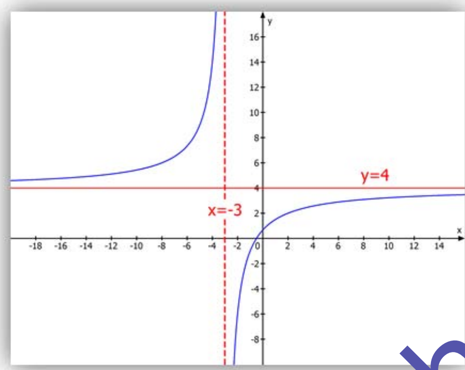
Bei Verwendung der Normalform rechnet man so:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty}\frac{2x+4}{x} = \lim_{|x|\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{1} = \frac{2+0}{1} = 2$$ Hier wurde durch x gekürzt.

In beiden Rechnungen führt wieder der Grenzwertsatz zum Ziel, der es gestattet, den Grenzwert von f aus den Grenzwerten der einzelnen Bestandteile des Bruches zu berechnen, also aus Zähler und Nenner sowie Summanden, Faktoren usw.

Die zerlegte Form hat für manche den Vorteil, dass man in $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$ sofort erkennen kann, dass f den Grenzwert 2 hat, und dass $y = 2$ die waagrechte Asymptote ist, weil der Bruch für $x \to \pm\infty$ gegen 0 geht.

B7: $\boxed{f(x)=\frac{4x+2}{x+3}}$



Hinweis: Schnittpunkt mit der x-Achse: $N\left(-\frac{1}{2}\,|\,0\right)$

Pol mit Vorzeichenwechsel: $x_P = -3$

Senkrechte Asymptote; x = -3

Grenzwertberechnung:

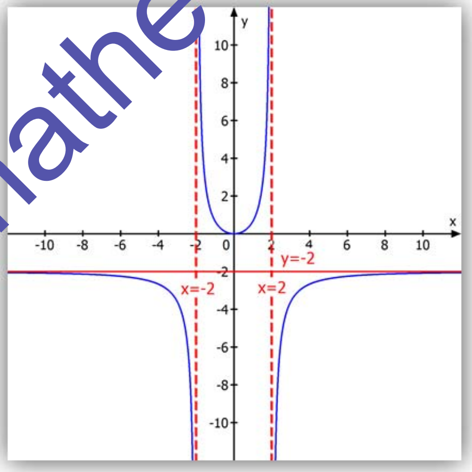
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+2}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\cancel{\frac{4+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}}}=\frac{4+0}{1+0}=4$$

Ich habe durch x gekürzt und dann den Grenzwertsatz angewandt.

Der durchgestrichene Bruch muss nicht angeschrieben werden, er zeigt hier nur an, wie die Berechnung des nächsten Bruches mit dem Grenzwertsatz erfolgt.

Folgerung: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote y = 4.

B8 $\boxed{f(x)=\frac{2x^2}{4-x^2}}$



Vorarbeit: Z=0: $x_1 = 0$ doppelte Lösung

N=0: $x_{2,3}=\pm 2$ $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

Auswertung:

Nullstelle $(Z=0 \text{ und } N\neq 0)$: x = 0

Pole $(N=0 \text{ und } Z\neq 0)$: $x=2$ und $x=-2$

(mit Vorzeichenwechsel)

Senkrechte Asymptoten: x = 2, x = -2

Grenzwertberechnung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\frac{4}{x^2}-1}=\cancel{\frac{2}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}-1}}=\frac{2}{0-1}=-2$$

Also hat das Schaubild die waagrechte Asymptote y = -2

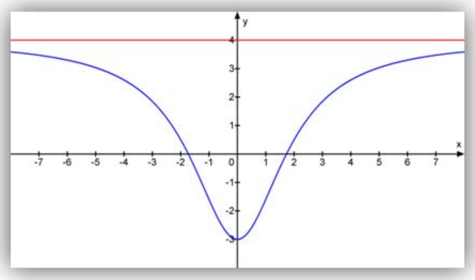
B9 $\boxed{f(x)=\frac{4x^2-12}{x^2+4}}$

Vorarbeit: Z = 0: $4x^2=12 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$

N = 0: $x^2=-4$ keine Lösung, also ist $D=\mathbb{R}$

Es gibt also auch keine senkrechte Asymptote.

f hat also die Nullstellen $\pm\sqrt{3}$, das Schaubild K hat 2 Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}\left(\pm\sqrt{3}\,|\,0\right)$.



Grenzwertberechnung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-12}{x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-\frac{12}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\cancel{\frac{4-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{12}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}}}=\frac{4-0}{1+0}=4$$

K hat also die waagrechte Asymptote y = 4.

3.3 Grad Zähler = Grad Nenner +1

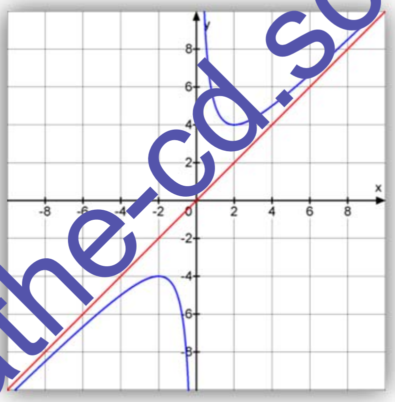
WISSEN: Diese Funktionen haben für $x \to \pm\infty$ **keinen** Grenzwert, denn die Funktionswerte gehen nach ∞ bzw. $-\infty$.

Das Schaubild hat eine schräge Asymptote.

Beispiele mit Begründungen:

Bei Funktionen, die im Nenner keine Summe enthalten, sollte man den Funktionsterm in Summanden zerlegen.

B10: $f(x) = \frac{x^2+4}{x} = x + \frac{4}{x}$



Für $x \to \infty$ geht der 1. Summand x gegen ∞ und $\frac{1}{x}$ gegen 0.

Für $x \to -\infty$ geht der 1. Summand x gegen $-\infty$ und $\frac{1}{x}$ gegen 0.

Man sollte so argumentieren:

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große $|x|$: $f(x) \approx x$

Also ist y = x schräge Asymptote für $x \to \pm\infty$.

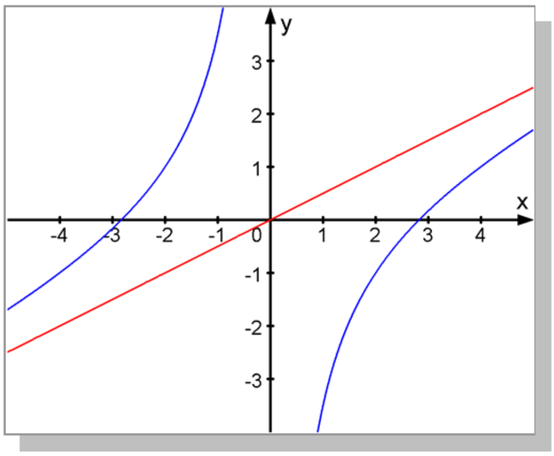
Die folgenden Schreibweisen sollte man nicht verwenden, da sie nicht korrekt sind:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{4}{x}\right) = \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} x}_{"=\infty"} + \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}_{=0} = \infty$. Mit ∞ darf man nicht rechnen!

Ganz schlimm ist dieses:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{4}{x}\right) = x$, denn hier wurde ja nur $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x} = 0$ berücksichtigt, nicht aber $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$!

B11 $f(x) = \frac{x^2-8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$



Die Normalform verwendet man für diese Vorarbeit:

$Z = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

$N = 0 \Leftrightarrow x = 0$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>Auswertung:</u>

Die Funktion besitzt die Nullstellen $\pm\sqrt{8}$ und die Polstelle 0 ($N = 0$ und $Z \neq 0$) - Das Schaubild schneidet somit die x-Achse in $N_{1,2}\left(\pm\sqrt{8} \mid 0\right)$ und besitzt die senkrechte Asymptote x = 0.

Da der Grad des Zählers um 1 größer ist als der Nenner, gibt es eine schräge Asymptote:

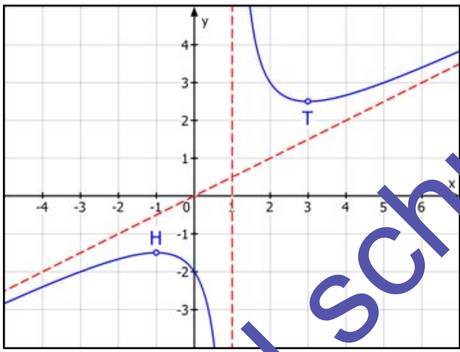
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große $|x|$: $f(x) \approx \frac{1}{2}x$

Also ist $y = \frac{1}{2}x$ schräge Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Bei Funktionen, die im Nenner eine Summe enthalten, sollte man den Funktionsterm durch Polynomdivision in Summanden zerlegen.

B12

$$f(x)=\frac{x^2-x+4}{2x-2}$$



Zuerst die Vorarbeit:

$Z=0 \Leftrightarrow x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-16}}{2}\notin\mathbb{R}$

$N=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x_3=1$ also ist $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

<u>Auswertung</u>: Weil die Funktion keine Nullstelle hat, schneidet das Schaubild die x-Achse nicht.

Der Pol ($N = 0$ und $Z \neq 0$) bei 1 mit VZW führt zur senkrechten Asymptote des Schaubilds mit gegensinniger Annäherung: $x = 1$.

Da der Grad des Zählers um 1 größer ist als der Nenner, gibt es eine schräge Asymptote.
Zu ihrer Bestimmung der schrägen Asymptote muss der Funktionsterm zerlegt werden.

Methode der Polynomdivision:

$$(x^2-x+4):(2x-2)=\tfrac{1}{2}x$$
$$\underline{-(x^2-x)}$$
$$4 \quad \text{Divisionsrest}$$

Ergebnis: $\frac{x^2-x+4}{2x-2}=\frac{1}{2}x+\frac{4}{2x-2}$

Jetzt kommt der entscheidende Schritt: ***Man zeigt, dass der Restbruch für $|x|\to\infty$ beliebig klein wird, so dass man ihn dann vernachlässigen kann.***

Das schreibt man so auf:

Da $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x-1}=\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{0}{1-0}=0$ ist,

gilt für große $|x|$: $f(x)=\frac{x^2-x+4}{2x-2}=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x-1}\boxed{\approx\frac{1}{2}x}$.

Daher nähert sich das Schaubild der Funktion f der Geraden $y=\frac{1}{2}x$ an.

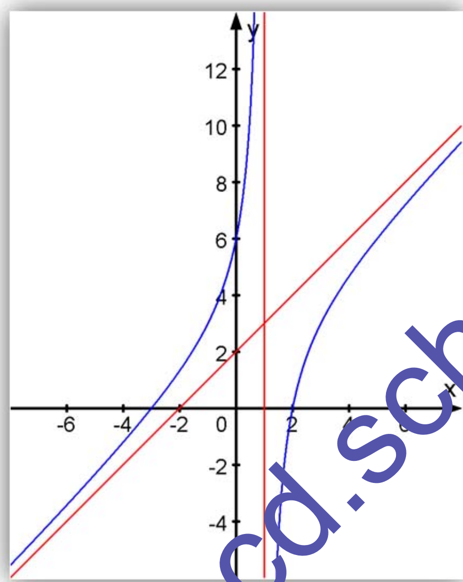
Ergebnis: $y=\frac{1}{2}x$ ist schräge Asymptote für das Schaubild von f.

Zusatz:

CAS-Rechner erledigen eine Polynomdivision mit dem Befehl propFrac.

$$\text{propFrac}\left(\frac{x^2-x+4}{2\cdot x-2}\right) \qquad \frac{2}{x-1}+\frac{x}{2}$$

B13 $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-1}$



Zuerst die Vorarbeit:

$$Z=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$$

$$N=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_3=1,\quad \text{also ist}\quad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

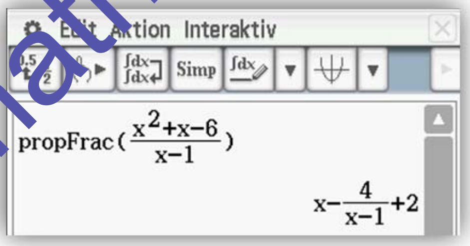
Also hat f die Nullstellen 2 und -3 ($Z=0$ und $N\neq 0$)
und die Polstelle 1 ($N=0$ und $Z\neq 0$).
Und das Schaubild K schneidet die x-Achse in
$N_1(2\,|\,0)$ und $N_2(-3\,|\,0)$ und hat die senkrechte Asymptote
x = 1 mit gegensinniger Annäherung.

Verhalten für $x\to\pm\infty$:

Zerlegung des Funktionsterms durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^2+x-6):(x-1)=x+2\\ \underline{-(x^2-x)}\\ \quad 2x-6\\ \quad \underline{-(2x-2)}\\ \qquad -4 \quad \text{Divisionsrest}\end{array}$$

Oder mit CASIO ClassPad:



Also gilt: $f(x)=x+2-\frac{4}{x-1}$ Hieraus liest man ab:

Also ist die Gerade mit der Gleichung $y=x+2$ schräge Asymptote.

Begründung: Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{0}{1-0}=0$ ist für große |x| $f(x)\approx x+2$

Diese Formulierung sollte man sich gut einprägen! Sie hilft wenn Grad Z > Grad N ist.

3.4 Grad Zähler = Grad Nenner +2

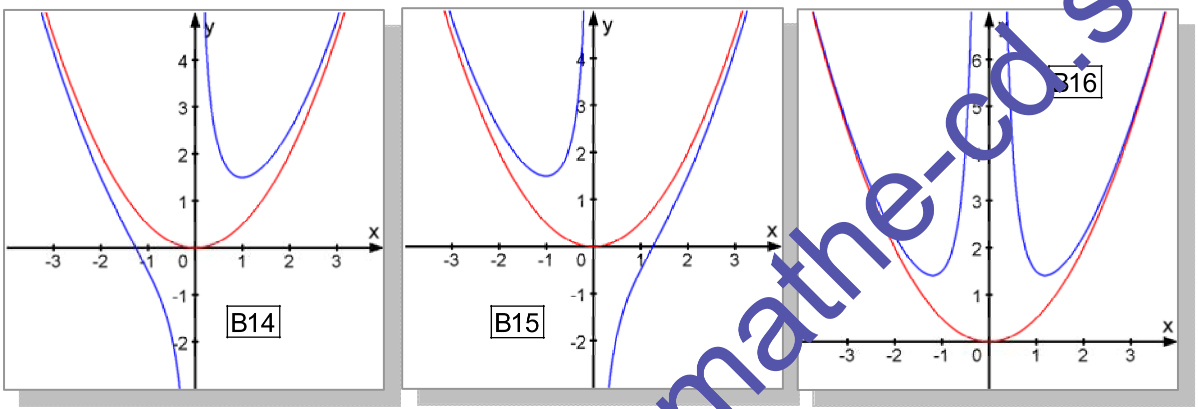
WISSEN: Diese Funktionen haben für $x \to \pm\infty$ **keinen** Grenzwert, denn die Funktionswerte gehen nach ∞ bzw. $-\infty$.

Das Schaubild hat eine Näherungsparabel.

Beispiele mit Begründungen:

Bei Funktionen, die im Nenner keine Summe enthalten, sollte man den Funktionsterm in Summanden zerlegen.

Hier drei typische Beispiele für dieses Verhalten



$f(x) = \frac{x^3+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{x^3-2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{x^4+2}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2}$

a) Betrachten wir zuerst die Nenner.

B14 und B15 haben den Nenner 2x, was zu einem <u>Pol mit Vorzeichenwechsel</u> bei 0 führt.

B16 hat dagegen im Nenner $2x^2$, also 0 als doppelte Polstelle = <u>Pol ohne Vorzeichenwechsel</u>.

Man erkennt dies auch sehr schön an den Bildchen. Dort wo die Funktion eine Polstelle hat, liegt immer eine senkrechte Asymptote des Schaubilds vor: Sie ist in allen drei Fällen „x = 0“. Also ist die y-Achse senkrechte Asymptote.

b) Was das Verhalten für $x \to \pm\infty$ betrifft, so nähern sich alle drei Kurven nach außen an die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ an.

Man erkennt das algebraisch nach der Zerlegung in Einzelbrüche. Alle drei Funktionen haben danach eine Gleichung der Form $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \pm r(x)$.

r(x) ist entweder $= \frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^2}$. Für $x \to \pm\infty$ gehen diese Restfunktionen gegen 0, so dass man sagen kann:

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$ gilt für große |x|: $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

Also ist $y = \frac{1}{2}x^2$ <u>Näherungskurve</u> für $x \to \pm\infty$ des Schaubilds K von f.

B17 $f(x)=\frac{x^4-4x^2+8x-8}{8x^2-32}$

Diese Aufgabe soll nur ein Beispiel sein, das man mit CAS lösen kann.

Mit **CASIO ClassPad** erreicht man:

f hat die Nullstellen $x_1 \approx -2{,}8$ und $x_2 \approx 1{,}5$ sowie die Polstellen $x_P = \pm 2$.

Das Schaubild K von f schneidet somit die x-Achse in $N_1 \approx (-2{,}8 \mid 0)$ und $N_2 \approx (1{,}5 \mid 0)$

Da der Zählergrad um 2 größer ist als der Nennergrad, hat K eine Näherungsparabel für $x \to \pm\infty$.

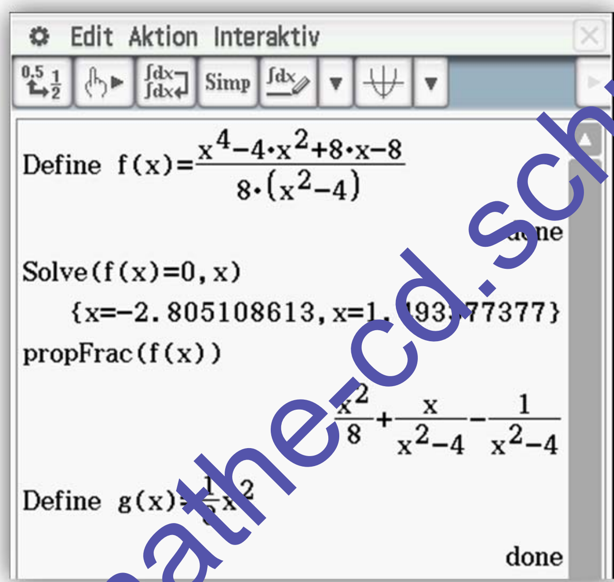
Durch Polynomdivision (propFrac) erhält man

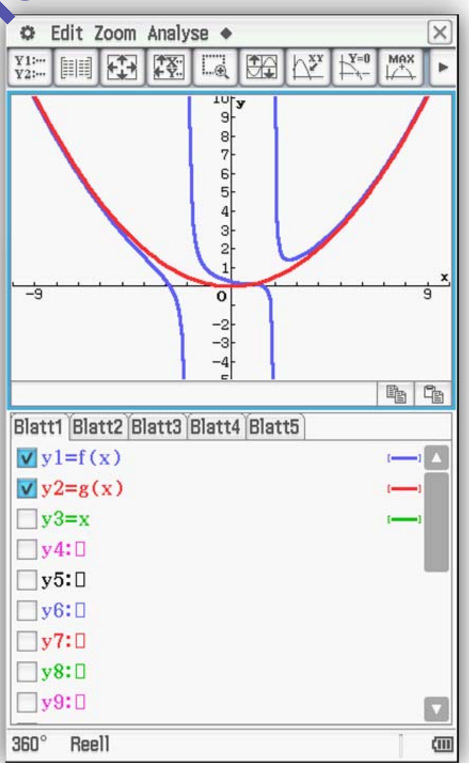
$$f(x)=\frac{1}{8}x^2+\frac{x-1}{x^2-4}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0}=0$

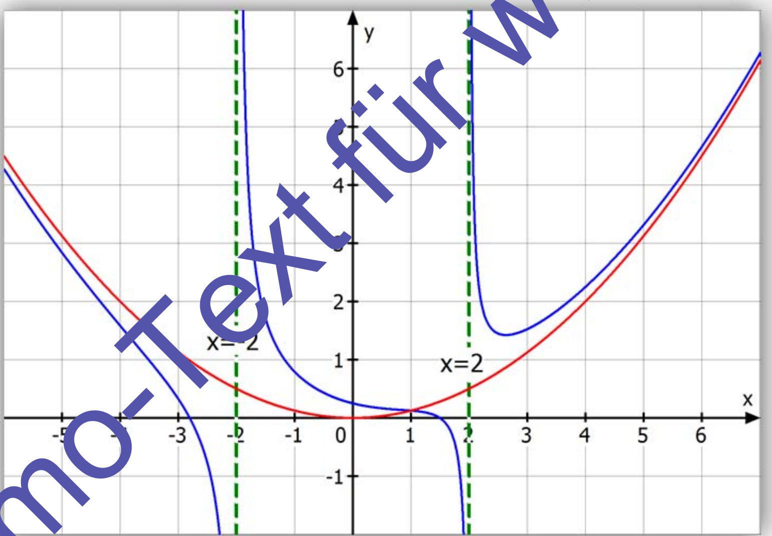
ist für große $|x|$ $f(x)\approx\frac{1}{8}x^2$.

Also ist $y=\frac{1}{8}x^2$ die Gleichung dieser Näherungsparabel.





Hier noch die Abbildung, wie sie MatheGrafix liefert:



3.5 Funktionsgleichungen mit Summen

Wir haben gelernt, dass in den Fällen, in denen der Zählergrad mindestens so groß ist wie der Nennergrad, eine Zerlegung in eine Summe möglich ist (Siehe Seite 12/13).

Damit kann man dann eine schräge Asymptote bzw. Näherungskurve besser erkennen:

Beispiel 10: $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ wird dann zu $f(x) == x + \frac{4}{x}$.

Die schräge Asymptote hat dann die Gleichung $y = x$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$

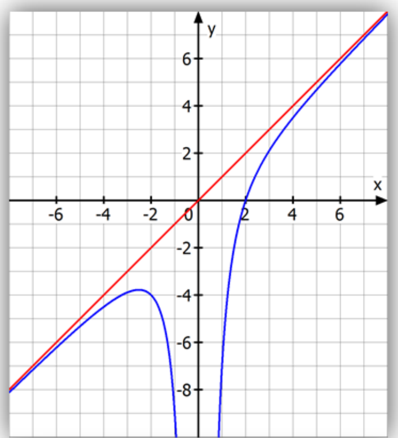
Beispiel 13: $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$ wird dann zu $f(x) = x + 2 - \frac{4}{x-1}$.

Die schräge Asymptote hat dann die Gleichung $y = x + 2$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$

Beispiel 14 $f(x) = \frac{x^3+2}{2x}$ wird dann zu $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

Das Schaubild hat daher die Näherungsparabel $y = \frac{1}{2}x^2$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Oftmals wird in Aufgaben eine gebrochen rationale Funktion schon zerlegt in eine Summe angegeben. Dann kann man Asymptote oder Näherungskurve sofort ablesen und begründen, muss jedoch zur Berechnung von Nullstellen und Polstellen den Funktionsterm erst in die Normalform bringen, also alles mit einen Bruchstrich darstellen. Dazu 2 Beispiele:



B18 $f(x) = x - \frac{8}{x^2}$

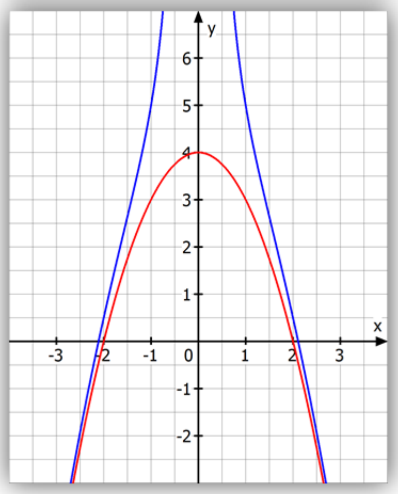
Man erkennt die schräge Asymptote $y = x$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0$.

Nach der Umformung in $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2}$

kann man berechnen: $Z = 0: \quad x = 2$,

$N = 0: \quad x = 0$ (doppelt).

Das ergibt die Nullstelle 2 und den Pol 0 ohne VZW.



B19 $f(x) = \frac{2}{x^2} - x^2 + 4$

Man erkennt die Näherungsparabel $y = -x^2 + 4$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Die Normalform lautet:

$$f(x) = \frac{-x^4 + 4x^2 + 2}{x^2}$$

3.6 Näherungskurven für $x \to 0$

Bei einigen Kurven kann man auch eine günstige Näherungskurve gegen die Polstelle 0 angeben, die den Verlauf noch besser beschreibt als die Annäherung an die senkrechte Asymptote.

Dazu zwei Beispiele

B20 $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3+2}{2x} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{x}}$

x = 0 ist eine Polstelle von f mit Vorzeichenwechsel,

Daher hat das Schaubild die senkrechte Asymptote x = 0 mit gegensinniger Annäherung.

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große IxI: $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

Also ist p: $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für $x \to \pm\infty$.

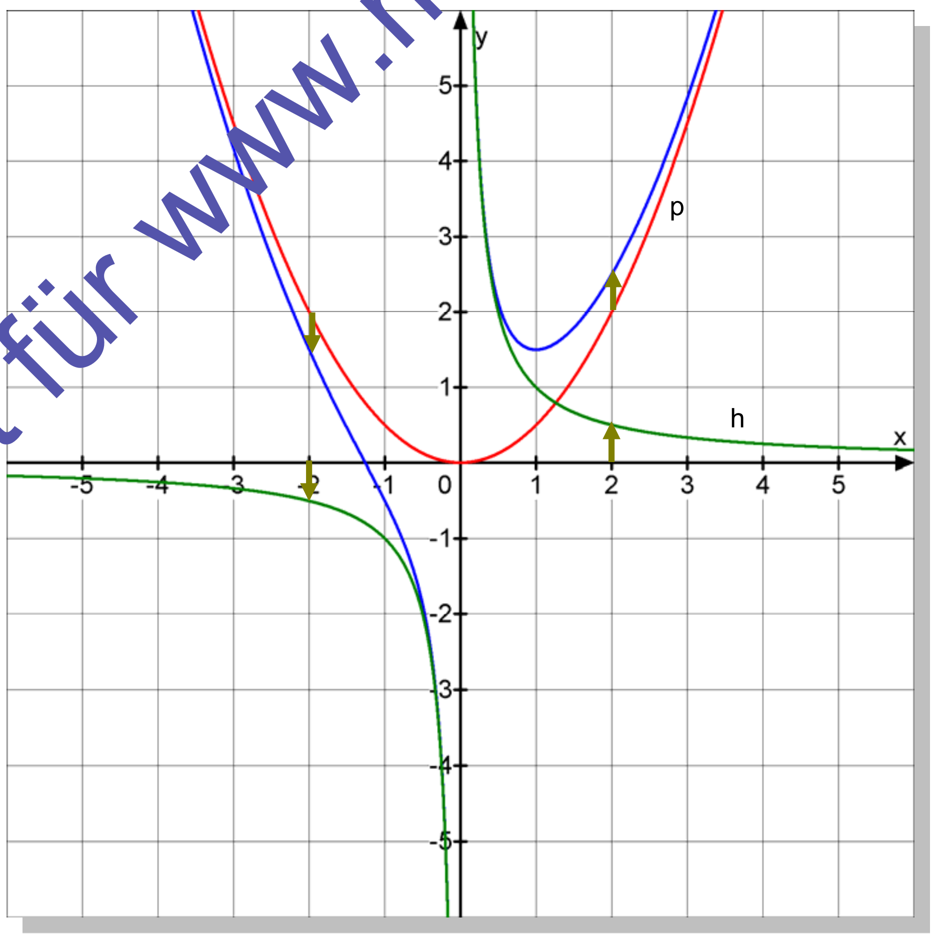
Außerdem kann man sagen:

Weil $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$, gilt für sehr kleine x (nahe bei 0): $f(x) \approx \frac{1}{x}$.

Also ist h: $y = \frac{1}{x}$ Näherungskurve für x gegen 0.

Die Abbildung zeigt an zwei Stellen die Konstruktion von Kurvenpunkten mittels Ordinatenaddition.

Zeigt der Pfeil nach oben, wird eine positive Zahl addiert. Zeigt er nach unten, wird eine negative addiert.



B21

$$f(x) = \frac{x^4+2}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2}$$

x = 0 ist eine Polstelle von f ohne Vorzeichenwechsel,

Daher hat das Schaubild die senkrechte Asymptote x = 0 mit gleichsinniger Annäherung.

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große |x|: $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

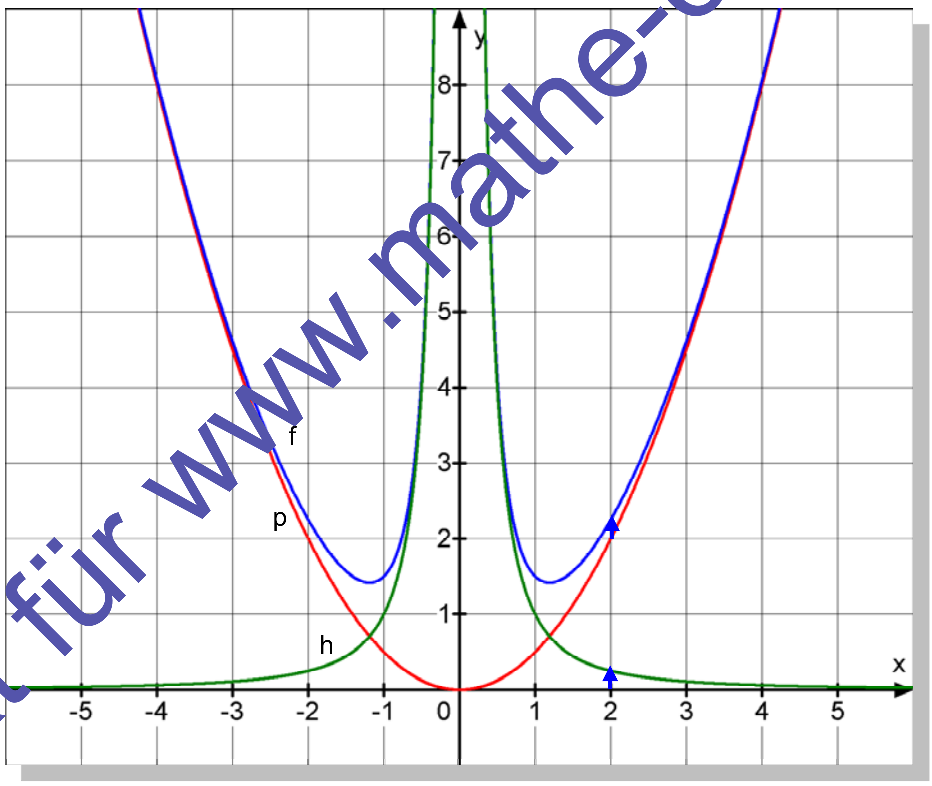
Also ist p: $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für $|x| \to \infty$.

Außerdem kann man sagen:

Weil $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$, gilt für sehr kleine x (nahe bei 0): $f(x) \approx \frac{1}{x^2}$.

Also ist h: $y = \frac{1}{x^2}$ Näherungskurve für x gegen 0.

Die Abbildung zeigt an einer Stellen die Konstruktion eines Kurvenpunkts mittels Ordinatenaddition.



Trainingsaufgaben 4

Gib zu diesen Funktionen an, welchen Grenzwert sie haben, und ob das zugehörige Schaubild eine waagerechte oder schräge Asymptote oder eine Näherungsparabel hat. Bestimme die Gleichung.

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+9}$ b) $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$ c) $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$ e) $f(x) = \frac{x^3-27}{x+1}$ f) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2}$

g) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x+1}$ h) $f(x) = \frac{16}{x^3-8}$ i) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x}$

Trainingsaufgabe 4 - Lösungen

a) $f(x)=\frac{4x}{x^2+9}$ Grad Z < Grad N: x-Achse ist waagerechte Asymptote.

Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2+9}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{9}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$

b) $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$ Grad Z = Grad N: Waagerechte Asymptote: $y=-3$

Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{2-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{3+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}-1}=\frac{3+0}{0-1}=-3$

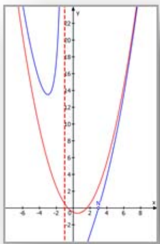
c) $f(x)=x-2+\frac{3}{x+1}$ Schräge Asymptote: $y=x-2$

denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0}{1+0}=0$

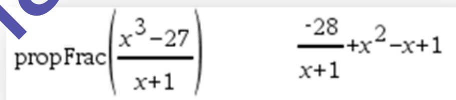
d) $f(x)=\frac{x^2-2}{2x^2}$ Grad Z = Grad N: Zerlegung: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2}-\frac{2}{2x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$

Waagrechte Asymptote: $y=\frac{1}{2}$, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$

e) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3-27}{x+1}$ Grad Z um 2 größer als Grad N: Näherungsparabel.



Zerlegung mit Rechner
oder mittels Polynomdivision in



$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-x+1-\frac{28}{x+1}\right)$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{28}{x+1}=0$ ist für große |x| $f(x)\approx\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)$.

Also ist $y=\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)$ Näherungsparabel für das Schaubild von f.

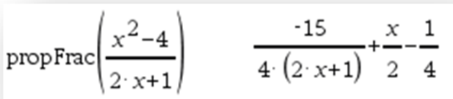
f) $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2}=x+\frac{2}{x^2}$ Grad Z um 1 größer als Grad N: schräge Asymptote $y=x$

denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}=0$ (Kein Grenzwert für $x\to\pm\infty$.)

g) $f(x)=\frac{x^2-4}{2x+1}$ Grad Z um 1 größer als Grad N: schräge Asymptote.

Zerlegung mit Rechner oder manuell mit Polynomdivision in

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{15}{4(2x+1)}$



Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{15}{8x+4}=0$ ist $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ schräge Asymptote.

h) $f(x)=\frac{16}{x^3-8}$ Grad Z < Grad N: Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.

Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{16}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{16}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}}=\frac{0}{1-0}=0$

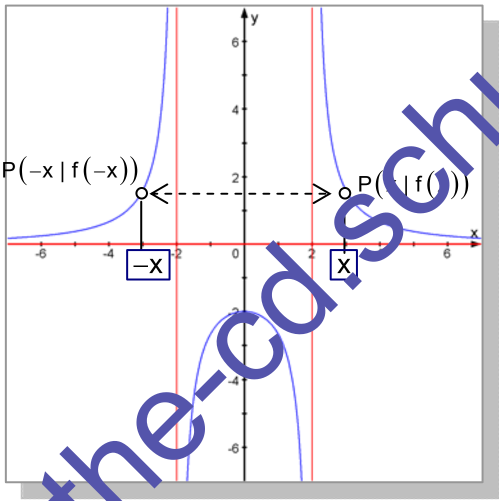
i) $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{x}$ $y=\frac{1}{4}x^2$ ist Näherungsparabel, weil $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0$.

4 Symmetrieverhalten

Zu diesem Thema gibt es einen eigenen Text (41211), der ausführlich die Hintergründe darlegt.

Hier einige andere Beispiele aus dem vorliegenden Text:

B22 $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$



WISSEN: Bei **Symmetrie zur y-Achse** gibt es zu jedem Kurvenpunkt $P(x\,|\,f(x))$ ein Spiegelbild, $P'(-x\,|\,f(-x))$, das auch wieder auf der Kurve liegt, also muss gelten: $f(-x)=f(x)$

Dies ist beim Vorhandensein von nur geraden Exponenten garantiert.

$$f(-x)=\frac{8}{(-x)^2-4}=\frac{8}{x^2-4}=f(x).$$

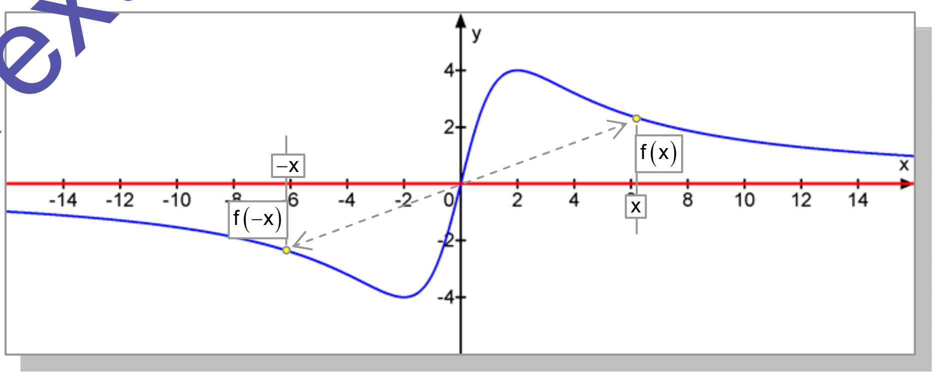
B23 $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+4}$

WISSEN: Bei **Symmetrie zum Ursprung** gibt es zu jedem Kurvenpunkt $P(x\,|\,f(x))$ ein Spiegelbild, $P'(-x\,|\,f(-x))$, das auch wieder auf der Kurve liegt, also muss gelten:

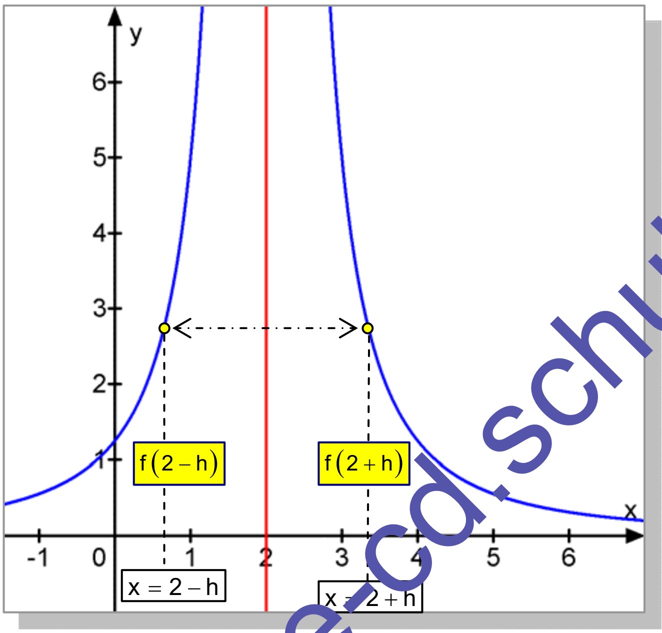
$$f(-x)=-f(x)$$

Nachweis: $f(-x)=\dfrac{16\cdot(-x)}{(-x)^2+4}=\dfrac{-16x}{x^2+4}=-f(x)$

Hier ist z. B. $H(2\,|\,4)$ der Hochpunkt der Kurve. Sein Spiegelbild ist der Tiefpunkt $T(-2\,|\,-4)$.
Und die Rechnung untersucht, ob $f(-2)=-f(2)$ ist.



B24 $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^2}$



Das Schaubild ist symmetrisch zur Geraden x = 2.

Das beweist man so:

Man wählt zwei Stellen, die um die gleiche Strecke h (>0) von x = 2 entfernt sind und zeigt, dass sie denselben Funktionswert haben.

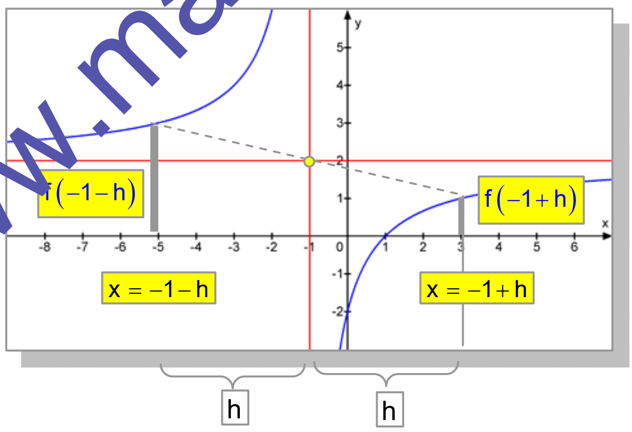
Zu zeigen: $\boxed{f(2+h)=f(2-h)}$

Ich empfehle, dazu die linke und die rechte Seite getrennt zu berechnen:

L.S.: $f(2+h)=\dfrac{5}{(2+h-2)^2}=\dfrac{5}{h^2}$

R.S.: $f(2-h)=\dfrac{5}{(2-h-2)^2}=\dfrac{5}{(-h)^2}=\dfrac{5}{h^2}$, was zu beweisen war.

B25 $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$



Das Schaubild K von f ist punktsymmetrisch zu $Z(-1|2)$.

Der Beweis ist schwierig.

Man wählt zwei Stellen, die um die gleiche Strecke h (>0) von x = -1 entfernt sind und berechnet deren Funktionswerte.

Bei Punktsymmetrie können diese nun nicht gleich sein, aber ihr Mittelwert muss gleich der y-Koordinate des Zentrums sein, also 2.

Zu zeigen ist: $\boxed{\dfrac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=y_Z=2}$

Beweis: $\text{L.S.}=\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{2(-1+h)-2}{(-1+h+1)}+\dfrac{2(-1-h)-2}{(-1-h)+1}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-2+2h-2}{h}+\dfrac{-2-2h-2}{-h}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2h-4}{h}-\frac{-2h-4}{h}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2h-4+2h+4}{h}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4h}{h}=2=\text{R.S.}$$

MERKE:

Wenn für alle h gilt $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$, dann ist das Schaubild K von f punktsymmetrisch zum Punkt $\mathbf{Z(a|b)}$.

Der Hintergrund ist der, dass das Symmetriezentrum Z stets Mittelpunkt zweier Spiegelbilder sein muss: $P_1(a+h|f(a+h))$ und $P_2(a-h|f(a-h))$. Also muss seine y-Koordinate b das arithmetische Mittel aus $f(a+h)$ und $f(a-h)$ sein.